

APLIKASI METODE KEKAKUAN UNTUK MENGHITUNG DISTRIBUSI GAYA TIANG FONDASI DENGAN MODEL KEPALA TIANG KAKU

Yoyong Arfiadi^{1*} dan Richard Frans²

^{1*}Departemen Teknik Sipil, Universitas Atma Jaya Yogyakarta, Jl. Babarsari no 44, Yogyakarta
e-mail: yoyong.ar@uajy.ac.id

² Program Studi Teknik Sipil, Universitas Atma Jaya Makassar, Jl. Tanjung Alang no 23, Makassar
e-mail: richardfrans.rf@gmail.com

ABSTRAK

Pada gedung bertingkat tinggi atau jembatan, umum digunakan fondasi tiang yang disatukan dengan kepala tiang (*pile cap*) untuk mendukung beban bangunan pada kolom tertentu. Jika beban yang bekerja, baik gaya aksial maupun momen, nilainya besar maka diperlukan lebih dari 1 tiang. Untuk menentukan kapasitas dan gaya yang dapat didukung oleh tiang, akibat gaya aksial dan momen dari struktur atas, dapat diturunkan berdasarkan prinsip-prinsip metode kekakuan. Hubungan antara perpindahan pada koordinat lokal dan global diperoleh dengan suatu matriks transformasi dengan menganggap kepala tiang (*pur*) sebagai elemen yang kaku. Selanjutnya dengan matriks transformasi ini, matriks kekakuan kelompok tiang dapat diperoleh dengan menganggap masing-masing mempunyai kekakuan pegas aksial sebagai kekakuan dalam sumbu lokal. Dengan anggapan ini maka hubungan antara gaya dan perpindahan global tiang dapat diperoleh, sehingga gaya-gaya pada masing-masing tiang akhirnya dapat ditentukan.

Kata kunci: gaya pada tiang, kelompok tiang, distribusi gaya, fondasi tiang, metode kekakuan.

1. PENDAHULUAN

Untuk menyalurkan beban yang besar dari struktur atas, pada kolom-kolom suatu bangunan gedung atau pilar suatu jembatan umumnya dipasang sejumlah fondasi tiang. Fondasi tiang tersebut jumlah dan susunannya ditentukan berdasarkan beban yang bekerja dan kekuatan tanah di mana struktur tersebut dibangun. Jumlah dan susunan tiang kemudian disatukan dengan *pur* atau kepala tiang (*pile cap*). Jika beban yang bekerja hanya beban aksial, maka gaya yang terjadi pada setiap tiang dapat dengan mudah diperoleh dengan membagi beban yang bekerja dengan jumlah tiang yang tersedia. Dalam hal ini gaya aksial yang didukung fondasi besarnya sama untuk semua tiang. Namun demikian, jika pada kolom atau pilar terdapat momen yang bekerja, maka tiang-tiang akan menerima gaya yang berbeda besarnya, tergantung letaknya dari kolom atau pilar di atasnya.

Untuk beban yang besar, fondasi tiang banyak digunakan untuk menyalurkan beban dari struktur atas ke tanah dasar. Ahmed dkk. (2022) meneliti fondasi tiang dengan fondasi rakit yang berdiri di atas lempung lunak. Model numerik dilakukan dengan perangkat lunak Plaxis 3D. Evaluasi terhadap rasio jarak dan diameter tiang dilakukan dalam penelitian tersebut. Bralovic dkk. (2022) melakukan penelitian terhadap fondasi rakit-tiang pada tanah pasir lepas. Studi eksperimen dilakukan dengan mengamati rasio jarak tiang terhadap diameter dan rasio panjang tiang terhadap diameter tiang. Penelitian lain terkait fondasi tiang juga telah dilakukan oleh para peneliti seperti Xie dan Chi (2020), Ahmed dkk. (2021), Kannaujiya dan Srivastava (2022), Aruna dan Gowda (2022), Yu dkk. (2019), dan Jamil dkk. (2022).

Dalam tulisan ini, distribusi gaya yang harus dipikul oleh masing-masing fondasi dari kelompok fondasi yang ada, dihitung berdasarkan prinsip-prinsip metode kekakuan. Prinsip-prinsip tersebut menyangkut hubungan antara perpindahan dan gaya yang bekerja pada sumbu lokal dan global. Kekakuan pada masing-masing fondasi tiang dapat dimodelkan sebagai pegas.

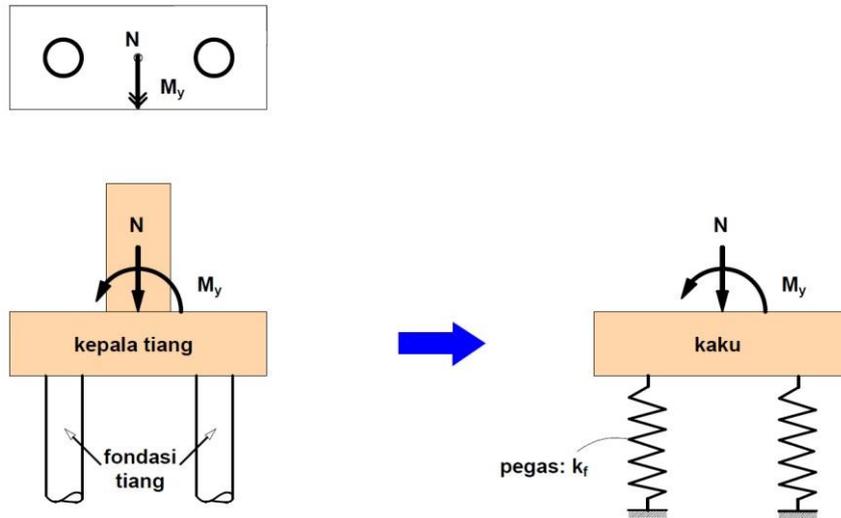
Salah satu prinsip pada metode matriks kekakuan adalah melakukan transformasi dari suatu koordinat (yang biasa disebut sebagai koordinat lokal) ke koordinat lain (yang biasa disebut sebagai koordinat global). Matriks transformasi dapat diperoleh dengan mengacu pada masalah yang akan diselesaikan. Selanjutnya persamaan-persamaan diselesaikan dengan mengacu pada koordinat global. Setelah perpindahan masing-masing tiang diperoleh, gaya yang bekerja pada tiang dapat dihitung dengan mengalikan kekakuan pegas dengan perpindahan tersebut.

2. MODEL FONDASI DAN KEPALA TIANG

Pada suatu struktur, misal bangunan gedung atau jembatan, kolom gedung atau pilar jembatan umumnya mengalami gaya aksial dan momen. Jika gaya-gaya yang bekerja nilainya besar, maka diperlukan beberapa fondasi tiang yang disatukan dalam suatu kepala tiang (*pur*). Untuk menganalisis distribusi gaya pada masing-masing tiang, diambil anggapan sebagai berikut:

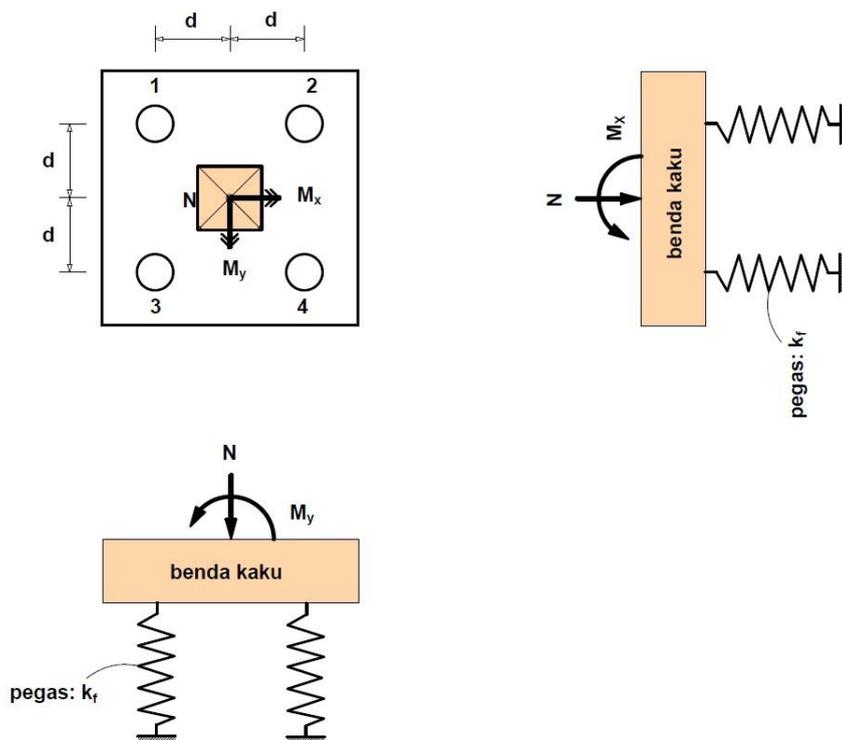
- a) kepala tiang dianggap sebagai benda kaku, sehingga tidak terjadi deformasi lentur;
- b) kekakuan masing-masing fondasi dinyatakan dengan suatu konstanta pegas.

Model fondasi dan kepala tiang ditunjukkan pada Gambar 1.



Gambar 1. Model analisis: kepala tiang kaku dan tiang sebagai pegas

Untuk model fondasi dengan momen pada kedua arah ditunjukkan pada Gambar 2. Dalam hal ini, kepala tiang mengalami momen pada arah-x dan arah-y seperti ditunjukkan pada Gambar 2.



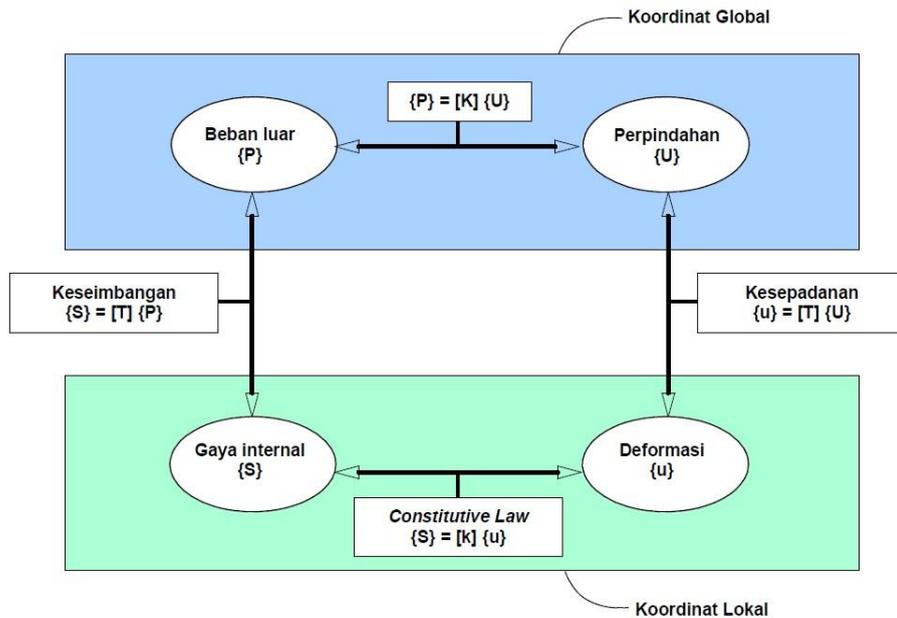
Gambar 2. Model analisis: kepala tiang kaku dan tiang sebagai pegas dengan momen 2 arah

Dengan anggapan ini, selanjutnya dapat diperoleh hubungan antara perpindahan pada pusat berat kepala tiang dengan

perpindahan pada masing-masing fondasi.

3. METODE KEKAKUAN DAN DERAJAT KEBEBASAN PADA KEPALA TIANG

Dalam tulisan ini metode kekakuan digunakan untuk menghitung distribusi gaya yang terjadi pada tiang fondasi dalam mendukung gaya aksial dan momen yang bekerja. Dalam metode kekakuan, hubungan variabel yang terlibat dapat ditunjukkan dengan Gambar 3.



Gambar 3. Hubungan antar variabel dalam metode kekakuan

Hubungan antar variabel secara detail dapat dilihat dalam Arfiadi (2011) dan ditunjukkan sebagai berikut ini.

Hubungan antara gaya batang dan perpindahan dalam sumbu lokal ditunjukkan dengan:

$$\{S\} = [k]\{u\} \quad (1)$$

dengan $\{S\}$ = vektor gaya internal, $[k]$ = matriks kekakuan dalam sumbu lokal, dan $\{u\}$ = perpindahan dalam sumbu lokal.

Hubungan antara perpindahan dalam sumbu lokal dan global dinyatakan dengan:

$$\{u\} = [T]\{U\} \quad (2)$$

dengan $\{U\}$ = perpindahan dalam sumbu global, dan $[T]$ = matriks transformasi.

Hubungan antara gaya pada sumbu lokal dan global, secara sama dapat dinyatakan dengan:

$$\{S\} = [T]^T\{s\} \quad (3a)$$

dengan $\{s\}$ = vektor beban luar. Mengingat matriks $[T]$ bersifat ortogonal, di mana transpose dari matriks $[T]$ sama dengan inversnya, maka persamaan (3a) dapat ditulis menjadi:

$$\{\diamond\diamond\} = [\diamond]^T \{\diamond\}$$

(3b) Selanjutnya dengan beberapa manipulasi seperti pada Arfiadi (2011), akan diperoleh hubungan antara matriks

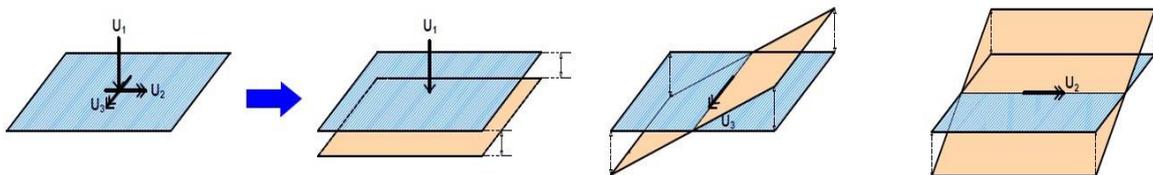
kekakuan pada sumbu global dengan perpindahan pada sumbu global melalui persamaan:

$$\{\mathbf{Q}\} = [\mathbf{K}]\{\mathbf{U}\} \quad (4)$$

dengan $[\mathbf{K}]$ merupakan matriks kekakuan dalam sumbu global, menurut:

$$[\mathbf{K}] = [\mathbf{L}]^T [\mathbf{k}] [\mathbf{L}]$$

(5) Untuk menggunakan prinsip metode kekakuan, dengan anggapan pur (kepala tiang) sebagai elemen yang kaku dan gaya yang berasal dari kolom gedung atau pilar jembatan sebagai beban luar, maka derajat kebebasan pada kepala tiang dapat digambarkan seperti pada Gambar 4.



Gambar 4. Derajat kebebasan pada kepala tiang yang dianggap kaku

Dengan derajat kebebasan pada kepala tiang yang dianggap kaku, hubungan antara perpindahan global (derajat kebebasan) dengan perpindahan lokal (pada masing-masing fondasi) dapat diperoleh. Dengan mengerjakan berturut-turut derajat kebebasan U_1 , U_2 dan U_3 , hubungan antara perpindahan tiang dengan $U_1 - U_3$, maka akan diperoleh matriks transformasi. Dengan diperolehnya matriks transformasi ini, maka hubungan antar variabel yang lain dapat ditentukan.

4. APLIKASI METODE KEKAKUAN PADA DISTRIBUSI GAYA FONDASI

Sebagai contoh ditinjau suatu kelompok tiang pancang yang disatukan dalam suatu pur (*pile cap*) seperti terlihat pada Gambar 5. Jumlah tiang ada 9 buah dengan jarak masing-masing tiang sama yaitu sebesar d . Gaya pada kolom terdiri dari gaya aksial P dan momen dalam dua sumbu M_x dan M_y . Dalam analisis, kepala tiang dianggap sebagai elemen yang kaku sehingga tidak berdeformasi. Kekakuan masing-masing fondasi ditunjukkan dengan suatu konstanta pegas k_{11}, k_{12}, k_{13} . Untuk sistem fondasi pada Gambar 5, matriks kekakuan dalam sumbu lokal dapat ditulis sebagai:

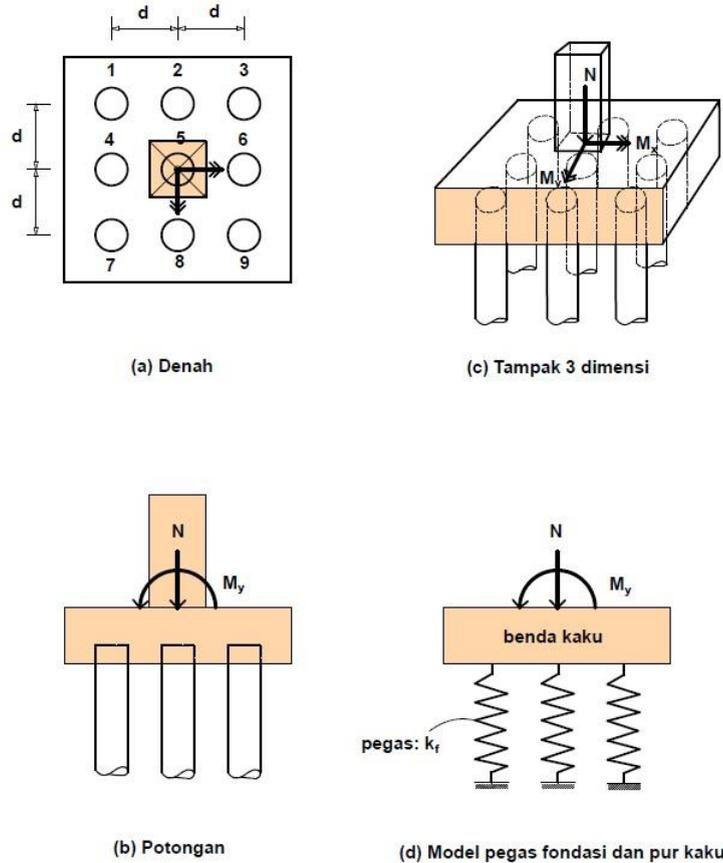
$$[\mathbf{K}] = \begin{bmatrix} k_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_{13} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_{21} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & k_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k_{23} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k_{31} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k_{32} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k_{33} \end{bmatrix} \quad (6)$$

Derajat kebebasan sistem fondasi ada 3 buah, yaitu U_1 , U_2 dan U_3 , yang bekerja dalam arah x , y dan z . Vektor perpindahan global (derajat kebebasan) dapat ditulis sebagai:

$$\{\mathbf{U}\} = \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{Bmatrix} \quad (7)$$

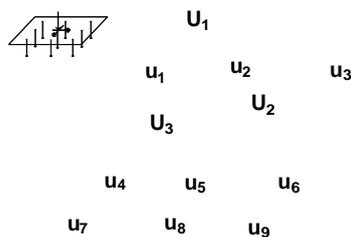
Sedangkan perpindahan lokal:

$$\{\diamond\diamond\diamond\} = [\diamond\diamond\diamond_1 \ u_2 \ u_3 \ u_4 \ u_5 \ u_6 \ u_7 \ u_8 \ u_9]^T \quad (8)$$



Gambar 5. Model kepala tiang kaku

Untuk mendapatkan hubungan antara perpindahan global \diamond_1 sampai dengan \diamond_3 dan perpindahan lokal $\diamond\diamond_1$ sampai dengan u_9 , dikerjakan masing-masing perpindahan global, lalu dicari hubungan antara perpindahan lokal dan global. Gambar 6 menunjukkan perpindahan global dan lokal.



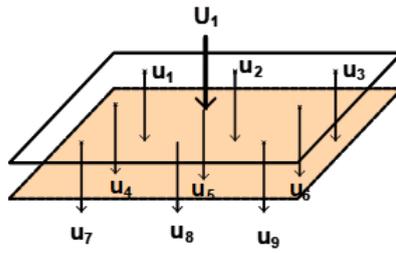
Gambar 6. Perpindahan global dan perpindahan lokal

Selanjutnya dikerjakan \diamond_1 lalu dicari hubungan antara $\diamond\diamond_1$ sampai dengan u_9 dengan \diamond_1 , seperti ditunjukkan pada Gambar 7.

Oleh \diamond_1 pada Gambar 7:

$$\diamond\diamond_1 = u_2 = \dots = \diamond\diamond_9 = \diamond_1$$

(9) Hubungan ini menempati kolom pertama dari matriks transformasi.

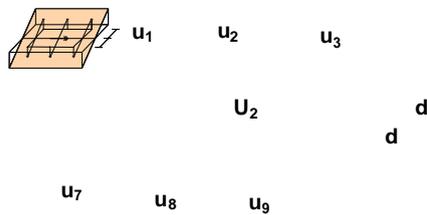


Gambar 7. Pengaruh ϕ_1

Oleh pengaruh ϕ_2 seperti ditunjukkan pada Gambar 8:

$$\begin{aligned}
 \phi_1 &= -\phi_2 d \\
 u_2 &= -\phi_2 d \\
 u_3 &= -\phi_2 d \\
 u_4 &= 0 \\
 u_5 &= 0 \\
 u_6 &= 0 \\
 u_7 &= \phi_2 d \\
 u_8 &= \phi_2 d \\
 u_9 &= \phi_2 d
 \end{aligned} \tag{10}$$

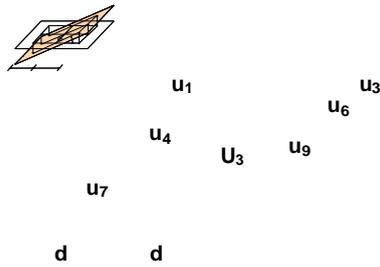
Hubungan ini menempati kolom ke-2 dari matriks transformasi.



Gambar 8. Pengaruh ϕ_2

Oleh pengaruh ϕ_3 seperti ditunjukkan pada Gambar 9:

$$\begin{aligned}
 \phi_1 &= \phi_3 d \\
 u_2 &= 0 \\
 u_3 &= -\phi_3 d \\
 u_4 &= \phi_3 d \\
 u_5 &= 0 \\
 u_6 &= -\phi_3 d \\
 u_7 &= \phi_3 d \\
 u_8 &= 0 \\
 u_9 &= -\phi_3 d
 \end{aligned} \tag{11}$$



Gambar 9. Pengaruh ϕ_3

Apabila pengaruh ini digabungkan, akan diperoleh hubungan antara perpindahan lokal dan global sebagai berikut:

$$\begin{matrix}
 \phi_3 \\
 \phi_3 \\
 1 \\
 u_2 \\
 u_3 \\
 u_4 \\
 u_5 \\
 u_6 \\
 u_7 \\
 u_8 \\
 u_9
 \end{matrix}
 =
 \begin{bmatrix}
 1 & -d & d \\
 1 & -d & 0 \\
 1 & -d & -d \\
 1 & 0 & d \\
 1 & 0 & 0 \\
 1 & 0 & -d \\
 1 & d & d \\
 1 & d & 0 \\
 1 & d & 0 \\
 1 & d & 0 \\
 1 & d & 0
 \end{bmatrix}
 \begin{matrix}
 \phi_1 \\
 \phi_2 \\
 \phi_3
 \end{matrix}
 \tag{12}$$

Atau secara sederhana dapat ditulis sebagai: $\{u_9\}$

$$\{ \phi_1 \} = [\phi_3] \{ \phi_2 \}
 \tag{13}$$

Dengan matriks transformasi $[\phi_3]$:

$$[\phi_3] =
 \begin{bmatrix}
 1 & -d & d \\
 1 & -d & 0 \\
 1 & -d & -d \\
 1 & 0 & d \\
 1 & 0 & 0 \\
 1 & 0 & -d \\
 1 & d & d \\
 1 & d & 0 \\
 1 & d & 0 \\
 1 & d & 0 \\
 1 & d & 0
 \end{bmatrix}
 \tag{14}$$

Dengan mengacu pada langkah-langkah dalam metode matriks kekakuan, matriks kekakuan dalam koordinat global dapat dihitung dengan

$$[\phi_3 \phi_3] = [\phi_3]^T$$

sehingga diperoleh:

$$\begin{bmatrix}
 9\phi_3^2 \phi_f & 0 \\
 0 & 0 \\
 6\phi_3^2 \phi_f^2 & 0 \\
 0 & 0 \\
 6\phi_3^2 \phi_f^2 & 0
 \end{bmatrix}
 \tag{15}$$

Beban yang bekerja pada kepala tiang adalah:

$$\{ \phi_1 \} = \{ \phi_2 \}
 \tag{16}$$

Perpindahan pada kepala tiang dapat dihitung dengan persamaan:

$$\begin{bmatrix} \Delta \\ \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta \\ \theta \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 9d^2 & 0 & 0 \\ 0 & 6d^2 & 0 \\ 0 & 0 & 6d^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

sehingga diperoleh:

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (17)$$

Perpindahan pada masing-masing tiang dapat dihitung dengan

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \\ u_7 \\ u_8 \\ u_9 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -d & d \\ 1 & -d & 0 \\ 1 & -d & -d \\ 1 & 0 & d \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -d \\ 1 & d & d \\ 1 & d & 0 \\ 1 & d & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix}$$

$$u_1 = \frac{1}{9d^2} - \frac{1}{6d^2} + \frac{1}{6d^2} = \frac{1}{9d^2}$$

$$u_2 = \frac{1}{9d^2} - \frac{1}{6d^2} - \frac{1}{6d^2} = -\frac{1}{9d^2}$$

$$u_3 = \frac{1}{9d^2} + \frac{1}{6d^2} = \frac{5}{18d^2}$$

Gaya-gaya yang terjadi pada masing-masing tiang dapat dihitung dengan:

$$\{F_i\} = [K_i][\Delta_i]$$

Dengan mensubstitusikan matriks kekakuan foudasi tiang dalam koordinat lokal dan perpindahan dalam sumbu lokal, diperoleh gaya pada masing0masing tiang sebagai berikut:

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \\ F_5 \\ F_6 \\ F_7 \\ F_8 \\ F_9 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{1}{9} - \frac{2d}{6d} + \frac{2d}{6d} \\ \frac{1}{9} - \frac{2d}{6d} \\ \frac{1}{9} - \frac{2d}{6d} - \frac{2d}{6d} \\ \frac{1}{9} + \frac{2d}{6d} + \frac{2d}{6d} \\ \frac{1}{9} + \frac{2d}{6d} \end{Bmatrix} \quad (19)$$

Persamaan dalam pustaka teknik fondasi, misal Bowles (1977), untuk gaya pada masing-masing tiang dari suatu kelompok tiang adalah:

$$F_i = n \frac{\sum_{i=1}^n F_i^2}{\sum_{i=1}^n F_i^2} \pm \frac{\sum_{i=1}^n F_i^2}{\sum_{i=1}^n F_i^2}$$

dengan n = jumlah tiang, F_i dan F_i adalah koordinat masing-masing fondasi, diukur dari pusat kepala tiang. Apabila persamaan (19) dan persamaan (20) dibandingkan, terdapat kesesuaian hasil analisis.

5. KESIMPULAN

Dalam tulisan ini telah dibahas aplikasi metode kekakuan untuk menghitung gaya-gaya yang terjadi pada tiang dalam suatu kepala tiang. Kekakuan masing-masing tiang dimodelkan dengan suatu konstanta pegas. Untuk mendapatkan distribusi pada masing-masing tiang, kepala tiang dimodelkan sebagai elemen yang kaku. Hubungan antara derajat kebebasan pada pusat kepala tiang dengan perpindahan pada masing-masing tiang diperoleh dari geometri. Dari hubungan tersebut dapat ditentukan matriks kekakuan kelompok tiang dalam koordinat global. Selanjutnya dari hubungan antara gaya luar dan kekakuan dapat dihitung perpindahan pada pusat kepala tiang (pur), sehingga perpindahan dan gaya yang terjadi pada masing-masing tiang dapat dihitung. Persamaan yang diperoleh dibandingkan dengan persamaan yang ada dalam pustaka tentang fondasi tiang, dan mempunyai kesesuaian. Dari hasil analisis,

dapat disimpulkan metode kekakuan dapat digunakan untuk menghitung distribusi gaya-gaya yang terjadi pada suatu tiang dalam kelompok.

DAFTAR PUSTAKA

- Ahmed, D., Taib, S.N.L., Ayadat, T, dan and Hasan, A. (2021). "A Review on the Behaviour of Combined Stone Columns and Pile Foundations in Soft Soils when Placed under Rigid Raft Foundation." *ASM Science Journal* 16 (July 15, 2021): 1–8. <http://dx.doi.org/10.32802/asmscj.2021.709>.
- Ahmed, D., Taib, S.N.L., Ayadat, T, dan and Hasan, A. (2022). "Numerical Analysis of the Carrying Capacity of a Piled Raft Foundation in Soft Clayey Soils." *Civil Engineering Journal* 8, no. 4 , 622–36. <http://dx.doi.org/10.28991/cej-2022-08-04-01>
- Arfiadi, Y. (2011). *Analisis Struktur dengan Metode Matriks Kekakuan*. Cahaya Atma Pustaka, Yogyakarta
- Aruna, T., Raju, K. V. S. B. dan Gowda, S. (2022) "Experimental Investigation of piled raft foundation on Cohesionless Soil." *International Journal of Research and Scientific Innovation* 09, no. 02, 113–18. <http://dx.doi.org/10.51244/ijrsi.2022.9207>.
- Bowles, J. E. (1977). *Foundation Analysis and Design*. McGraw-Hill Kogakusha, Ltd., Tokyo.

- Bralović, N., Despotović, I. dan Danijel Kukaras, D. (2022). "Experimental Analysis of the Behaviour of Piled Raft Foundations in Loose Sand." *Applied Sciences* 13, no. 1, 546. <http://dx.doi.org/10.3390/app13010546>.
- Jamil, I., Ahmad, I., Ullah, W., Ahmad, W., Sabri, M.M.S. dan Majdi, A. (2022). "Experimental Study on Lateral and Vertical Capacity of Piled Raft and Pile Group System in Sandy Soil." *Applied Sciences* 12, no. 17 (September 2, 2022): 8853. <http://dx.doi.org/10.3390/app12178853>.
- Kannaujiya, P. dan Srivastava, V.K. (2022). "Behavior of Different Configuration of Piled Raft Foundation for a High-Rise Building by using FEM." *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering* 1236, no. 1, 012006. <http://dx.doi.org/10.1088/1757-899x/1236/1/012006>.
- Xie, Y, dan Chi, S. (2019), "Optimization Method for Irregular Piled Raft Foundation on Layered Soil Media." *Advances in Civil Engineering* 2019, 1–15. <http://dx.doi.org/10.1155/2019/5713492>
- Xie, Y, dan Chi, S. (2020) "Optimization Method of Reducing the Differential Settlements of Piled Raft Foundations Based on Pile-to-Pile Interaction Theory." *Advances in Civil Engineering* 2020, 1–14. <http://dx.doi.org/10.1155/2020/1521876>.
- Yu, E., Ren, S., Tang, H., Li, Y., dan Fang, C. (2019) "Improvement on Structural Forms of Pile Group Foundations of Deepwater Bridges." *Shock and Vibration* 2019, 1–15. <http://dx.doi.org/10.1155/2019/7381852>.